***Duo*limpiadi II**

Alla ricerca della tavoletta dell'n-agono

Soluzioni

1.

> Biagio propone due giochi a Madeline. Il primo è il seguente: sceglie due sequenze di numeri interi positivi $(a_i)_{i=1}^{m}$ e $(b_j)_{j=1}^{n}$ e crea una griglia con m righe e n colonne, dove in ogni cella (i, j) scrive il numero $a_i \cdot b_j$. Mostra la griglia a Madeline, che deve indovinare le due sequenze. Per quali griglie create da Biagio esiste una strategia per Madeline che garantisce che lei vinca?

Madeline è sicura di vincere quando il massimo comune divisore tra tutte le celle della griglia è 1.

Lemma ■
Madeline non riesce a determinare unicamente le sequenze quando il massimo comune divisore è maggiore di 1.

Dimostrazione
Chiamato d il GCD di tutte le celle, si nota che necessariamente d divide ogni elemento di una delle due sequenze: se fosse altrimenti, si consideri la cella che è il prodotto che contiene quell'elemento non divisibile per d e un elemento dell'altra sequenza anch'esso non divisibile per d (se non esistesse, il GCD sarebbe almeno d^2), e si nota che non è divisibile per d, $\rightarrow\!\leftarrow$. Ma è facile notare che è impossibile attribuire il fattore d all'una o all'altra sequenza: le successioni $(x_i)_{i=1}^{m}$ e $(d \cdot y_j)_{j=1}^{n}$ e le successioni $(d \cdot x_i)_{i=1}^{m}$ e $(y_j)_{j=1}^{n}$ generano evidentemente la stessa griglia.

Lemma ●
Madeline riesce a determinare unicamente le sequenze quando il massimo comune divisore è 1.

Dimostrazione
Si suggerisce a Madeline il seguente procedimento:
- a_i è il GCD tra tutte le celle di riga j e b_j è il GCD tra tutte le celle di colonna i.

Chiaramente questo algoritmo è simmetrico tra righe e colonne, senza perdita di generalità si dimostra il caso delle righe.

Si chiami d_j il GCD tra tutte le celle di riga j. Ora, a_j divide d_j, ma si vede inoltre che $a_j = d_j$: se così non fosse, tutte le colonne avrebbero un fattore $\frac{d_j}{a_j} > 1$, che necessariamente deriverebbe dai termini b_k, cioè $\frac{d_j}{a_j} \mid b_k$ per ogni k, quindi il GCD tra tutti i b_k sarebbe diverso da 1, e dunque anche quello della griglia intera lo sarebbe $\rightarrow\!\leftarrow$

Allora $a_j = d_j$, e il procedimento che è stato suggerito a Madeline è funzionante.

I due lemmi partizionano lo spazio delle griglie possibili, e dunque si dimostra la tesi. ■

Marking scheme

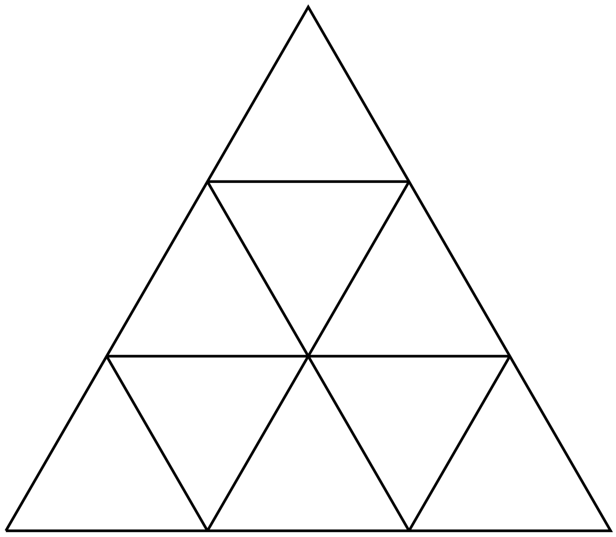
- **2 punti** se si trova la condizione corretta (**1 punto** se la condizione viene data descrivendo una proprietà delle sequenze e non della griglia)
- **5 punti** se si dimostra che la condizione è necessaria
- **3 punti** se si dimostra che la condizione è sufficiente

2.

> Dato un triangolo equilatero di lato 2, sono scelti dieci punti al suo interno.
> Determinare se esistono sempre due punti tra questi distanti al massimo $\dfrac{2^{2^2}}{2^{2^2}+2^2+2}$.

> *Lemma*
> In un triangolo equilatero, la distanza massima tra due punti qualsiasi è minore o uguale al lato del triangolo.
> È possibile prendere questo lemma per noto, si fornisce comunque una dimostrazione per completezza dopo la risoluzione del problema.

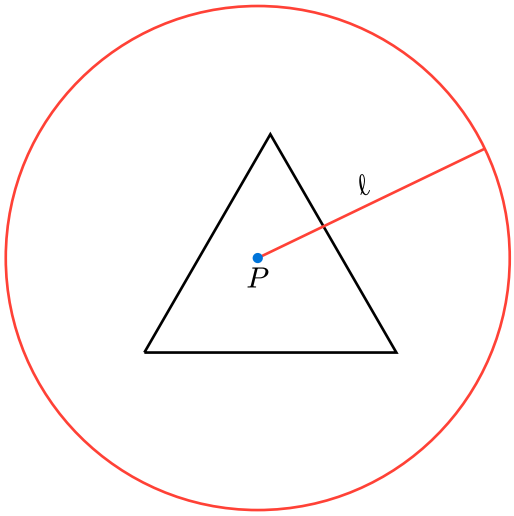
Si suddivide il triangolo in nove triangoli equilateri di lato $\frac{2}{3}$.



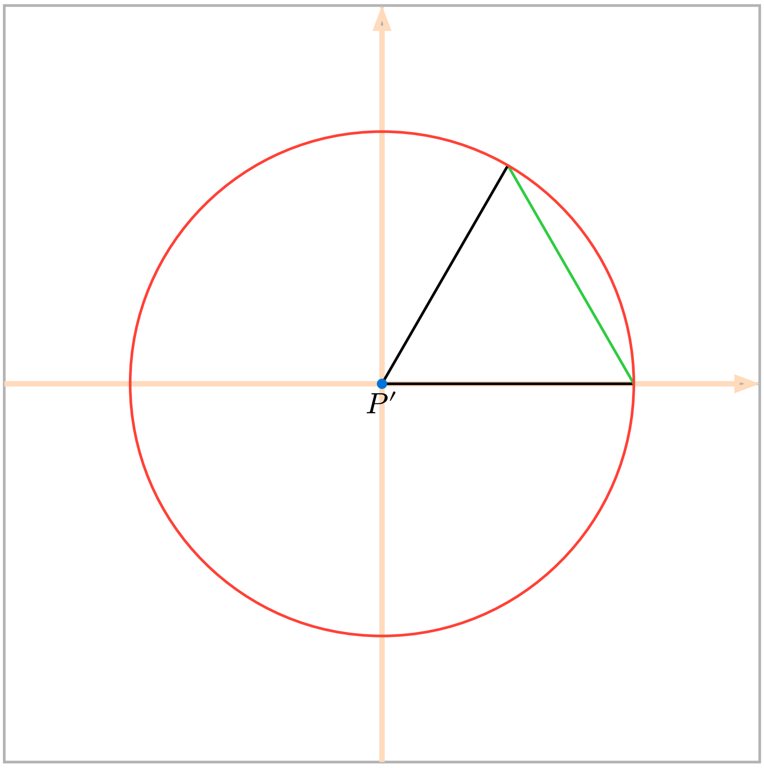
Per il principio dei cassetti, almeno due dei dieci punti devono cadere nello stesso triangolo. Per il lemma, i due punti che cadono nello stesso triangolo avranno distanza massima pari a $\frac{2}{3} \leq \frac{8}{11} = \frac{2^{2^2}}{2^{2^2}+2^2+2}$ ■

Dimostrazione del lemma

Si consideri un triangolo di lato ℓ e uno dei due punti, e si tracci la circonferenza di raggio ℓ centrata in quel punto.



La circonferenza racchiude, per definizione, tutti i punti a distanza minore o uguale di ℓ da P. Si dimostra che l'intero triangolo è contenuto nella circonferenza, considerando ciascun lato. Senza perdita di generalità, si può collocare la figura in un piano cartesiano dove il vertice opposto al lato considerato si trova in $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e il lato considerato ha estremi $\begin{bmatrix} \ell \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{\ell}{2} \\ \ell\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Si può notare che la distanza dal lato al punto P è massima proprio quando P coincide con il vertice opposto, e si può quindi considerare solo questa configurazione.



Si vede che in questo caso il lato considerato è corda della circonferenza in P (i due estremi sono a distanza ℓ da P')

Quindi l'intero triangolo è contenuto nella circonferenza di raggio ℓ centrata in P, uno dei due punti che devono necessariamente essere nello stesso triangolo, e allora il secondo punto sarà sicuramente ad una distanza minore o uguale a ℓ dal primo. ∎

Marking scheme

- **0 punti** se si risponde correttamente alla domanda
- **1 punto** se si enuncia il lemma (non è necessaria la dimostrazione)
- **5 punti** se si divide il triangolo in nove triangoli equilateri
- **3 punti** se si utilizza il principio dei cassetti
- **1 punto** se si conclude

3.

Si chiama $\mathrm{Duo}(n)$ la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!}$, che si può supporre convergente. Dimostrare che

$$\frac{\mathrm{Duo}(n)}{\mathrm{Duo}(0)} \in \mathbb{N}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Lemma

$\mathrm{Duo}(n)$ è sempre convergente. È ipotesi, ma è comunque facilmente dimostrabile per completezza.

Si applica il *ratio test*, per cui $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge se $\lim_{j\to\infty} \left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| < 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \left| \frac{(j+1)^n}{(j+1)!} \div \frac{j^n}{j!} \right| &= \lim_{j\to\infty} \left| \frac{(j+1)^n}{j^n} \cdot \frac{j!}{(j+1)!} \right| \\
&= \lim_{j\to\infty} \left| \frac{(j+1)^{n-1}}{j^n} \right| \\
&= \lim_{j\to\infty} \left| \frac{j^{n-1}}{j^n} \right| \\
&= \lim_{j\to\infty} \left| \frac{1}{j} \right| \\
&= 0 < 1 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Soluzione 1

Si dimostra per induzione il risultato più forte, che

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^n \frac{x^j}{j!} = p_n(x) e^x$$

per un certo $p_n(x) \in \mathbb{N}[x]$. È dunque caso particolare quello in cui $x = 1$, da cui $\mathrm{Duo}(n) = p(1)e^1$ e, considerato che $\mathrm{Duo}(0) = e$, allora $\frac{\mathrm{Duo}(n)}{\mathrm{Duo}(0)} = p(1) \in \mathbb{N}$.

Passo base

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^0 \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x \quad \blacksquare$$

Passo induttivo

Supposto che

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^n \frac{x^j}{j!} = p_n(x)e^x$$

allora

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{j=0}^{\infty} j^n \frac{x^j}{j!} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_n(x)e^x) \\
\sum_{j=0}^{\infty} j^n \frac{jx^{j-1}}{j!} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_n(x)\right)e^x + p_n(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x\right) \\
\sum_{j=0}^{\infty} j^{n+1} \frac{x^{j-1}}{j!} &= p_n'(x)e^x + p_n(x)e^x \\
x\sum_{j=0}^{\infty} j^{n+1} \frac{x^{j-1}}{j!} &= x(p_n'(x) + p_n(x))e^x \\
\sum_{j=0}^{\infty} j^{n+1} \frac{x^j}{j!} &= (xp_n'(x) + xp_n(x))e^x
\end{aligned}$$

È chiaro che, se $p_n(x) \in \mathbb{N}[x]$, anche $p_{n+1}(x) := xp_n'(x) + xp_n(x) \in \mathbb{N}[x]$ ■

Soluzione 2

Si dimostra che $\mathrm{Duo}(n) = e\mathrm{B}_n$, dove B_n è il n-esimo numero di Bell.

Definizione

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_0 &= 1 \\
\mathrm{B}_{n+1} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathrm{B}_j
\end{aligned}$$

Lemma

$$\mathrm{B}(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{B}_j \frac{x^j}{j!} = e^{e^x - 1}$$

È possibile prendere questa formula per nota, si fornisce comunque una dimostrazione per completezza dopo la risoluzione del problema.

Si costruisce dunque e^{e^x-1} partendo dalla definizione di funzione esponenziale.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \\
e^{e^x} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(e^x)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xj)^k}{j!k!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e\cdot e^{e^x-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(xj)^k}{j!k!}\\
e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{B}_k}{k!}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^k}{j!}\\
e\mathrm{B}_k &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^k}{j!} = \mathrm{Duo}(k) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Dimostrazione della formula

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}(x) &:= \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{B}_j\frac{x^j}{j!}\\
\mathrm{B}'(x) &= \sum_{j=1}^{\infty}j\mathrm{B}_j\frac{x^{j-1}}{j!} && \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{B}_0x^0 = 0\right]\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{B}_j\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{B}_{j+1}\frac{x^j}{j!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}x^j\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{\mathrm{B}_k}{j!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}x^j\sum_{k=0}^{j}\frac{j!}{k!(j-k)!}\frac{\mathrm{B}_k}{j!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{\mathrm{B}_kx^kx^{j-k}}{k!(j-k)!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\left(\mathrm{B}_k\frac{x^k}{k!}\right)\left(\frac{x^{j-k}}{(j-k)!}\right)\\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{B}_j\frac{x^j}{j!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\right) && \text{[prodotto di Cauchy]}\\
&= e^x\mathrm{B}(x)\\
\mathrm{B}'(x) &= e^x\mathrm{B}(x)\\
\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}x} &= e^x\mathrm{B}\\
\int\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{B}} &= \int e^x\,\mathrm{d}x\\
\ln(\mathrm{B(x)}) &= e^x + C\\
\mathrm{B(x)} &= e^{e^x+C}\\
e^{e^0-1} = 1 = \mathrm{B}_0 = \mathrm{B}(0) &= e^{e^0+C}\\
\mathrm{B}(x) &= e^{e^x-1} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Soluzione 3

Definizione

$$x_k^{\downarrow} := x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$$

Si nota che $x_0^{\downarrow} = 1$.

Lemma

È possibile scrivere qualsiasi polinomio $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ come combinazione lineare di $x_0^{\downarrow}$, $x_1^{\downarrow}$, ..., $x_{\deg(p)}^{\downarrow}$.

Dimostrazione

Induzione forte sul grado di p.

Passo base

Se $\deg(p) = 0$, $p(x) = k = k \cdot x_0^{\downarrow}$.

Passo induttivo

Assunto che qualsiasi polinomio di grado minore o uguale a k sia esprimibile come combinazione lineare di $x_0^{\downarrow}$, $x_1^{\downarrow}$, ..., $x_k^{\downarrow}$, si considera un polinomio $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado $k+1$, dunque

$$p(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_0 x^0$$

Si consideri il polinomio

$$q(x) = a_{k+1}x_{k+1}^{\downarrow}$$

e si nota che $\deg(p-q) < k+1$, e che $p(x)$ e $q(x)$ concordano nel termine di grado $k+1$. Allora è possibile costruire un polinomio $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado minore o uguale a k per cui $q(x) + r(x) = p(x)$. Induttivamente, $r(x)$ è esprimibile come combinazione lineare di $x_0^{\downarrow}$, $x_1^{\downarrow}$, ..., $x_k^{\downarrow}$, e allora $p(x)$ è esprimibile come combinazione lineare di $x_0^{\downarrow}$, $x_1^{\downarrow}$, ..., $x_k^{\downarrow}$, $x_{k+1}^{\downarrow}$

■

Lemma ▲

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j_k^{\downarrow}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione
Si nota che per $k > j$, il prodotto di $k_j^{\downarrow}$ include un termine 0. La somma può quindi partire da $j = k$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{\infty} \frac{j_k^{\downarrow}}{j!} &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{j(j-1)(j-2)\cdots(j-k+1)}{j(j-1)(j-2)\cdots 1} \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(j-k)(j-k-1)\cdots 1} \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{(j-k)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Si considera la somma $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!}$, e si nota che j^n è esprimibile come combinazione lineare di $j_0^{\downarrow}, j_1^{\downarrow}, \ldots, j_n^{\downarrow}$ per il Lemma ■.

$$\begin{aligned}\mathrm{Duo}(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell j_\ell^{\downarrow} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j_\ell^{\downarrow}}{j!} \\ &\overset{\blacktriangle}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \\ &= \left(\sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\right) \\ \frac{\mathrm{Duo}(n)}{\mathrm{Duo}(0)} &= \sum_{\ell=0}^{n} \alpha_\ell \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Ma ovviamente $\frac{\mathrm{Duo}(n)}{\mathrm{Duo}(0)} \geq 0$, e dunque $\frac{\mathrm{Duo}(n)}{\mathrm{Duo}(0)} \in \mathbb{N}$ ■

Soluzione 4

Si dimostra la tesi per induzione forte su n.

Passo base $n = 0$: $\frac{\mathrm{Duo}(0)}{\mathrm{Duo}(0)} \in \mathbb{N}$.

Passo induttivo

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Duo}(n+1)}{\mathrm{Duo}(0)} &= \frac{1}{\mathrm{Duo}(0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^{n+1}}{j!} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Duo}(0)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{n}}{(j-1)!} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Duo}(0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)^{n}}{j!} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Duo}(0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} j^t}{j!} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Duo}(0)} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{n}{t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^t}{j!} \\
&= \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} \frac{\mathrm{Duo}(t)}{\mathrm{Duo}(0)}
\end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva, $\mathrm{Duo}(t)/\mathrm{Duo}(0) \in \mathbb{N}\, \forall 0 \leq t \leq n$. Evidentemente $\binom{n}{t} \in \mathbb{N}$, e allora $\frac{\mathrm{Duo}(n+1)}{\mathrm{Duo}(0)} \in \mathbb{N}$. ■

Soluzione 5

Lemma

$$\mathrm{Duo}(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e$$

noto (una delle tante definizioni di e, alternativamente dalla serie di Taylor di e^x)

Lemma «Formula di Dobiński»

$$e\mathrm{B}_n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!}$$

dove $\mathrm{B_n}$ é l'n-esimo numero di Bell.

Noto, la dimostrazione é essenzialmente la Soluzione 2.

La tesi segue direttamente dal lemma e dalla formula, notando che il lato destro della formula é $\mathrm{Duo}(n)$.

Marking scheme

Soluzione 1

- **3 punti** se si introduce $p_n(x)$
- **7 punti** se si conclude

Soluzione 2

- **5 punti** se si enuncia il lemma (non è necessaria la dimostrazione)
- **5 punti** se si conclude

Soluzione 3

- **5 punti** se si dimostra il Lemma ■
- **3 punti** se si dimostra il Lemma ▲
- **2 punti** se si conclude

Soluzione 4

- **1 punto** se si induce su n
- **6 punti** se si espande la potenza di binomio
- **3 punti** se si conclude

Soluzione 5

- **8 punti** se si enuncia la formula di Dobiński
- **1 punto** se si dice che $\mathrm{Duo}(0) = e$
- **1 punto** se si conclude

4.

> Sia $\sigma_0(n)$ il numero di divisori positivi di n. Trovare tutti gli $n \in \mathbb{Z}^+$ per cui
>
> $$\sigma_0(3^n - \mathbf{2}^n) = n$$

Le uniche soluzioni sono $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Si definiscano m e k per cui $2 \nmid m$ e $n = 2^k m$. Allora

$$3^n - 2^n = (3^m)^{2^k} - (2^m)^{2^k} = (3^m - 2^m)(3^m + 2^m)(3^{2m} + 2^{2m}) \cdots \left(3^{2^{k-1}m} + 2^{2^{k-1}m}\right)$$

> *Lemma* ■
> I termini del prodotto sono coprimi tra loro.
>
> *Dimostrazione*
> Si numerano i termini del prodotto, partendo da 1, nell'ordine in cui appaiono scritti sopra.
>
> È chiaro che tutti i termini sono dispari. Si nota che il prodotto dei primi ℓ termini è uguale all'$\ell + 1$esimo, meno $2^{(2^\ell + 2)m}$. Se i due non fossero coprimi, allora avrebbero un divisore comune $d \neq 1$, ma allora anche la loro differenza sarebbe divisa da d; ma la differenza è una potenza di due $\rightarrow\!\leftarrow$

Lemma ▲
$3^a + 2^a = b^2$ non ha soluzioni per $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Dimostrazione
$a = 1$ non porta a nessuna soluzione. Si considera il caso $a \geq 2$.

$$\begin{aligned} 3^a + 2^a &= b^2 \\ (-1)^a &\equiv b^2 \pmod 4 \end{aligned}$$

-1 non è residuo quadratico modulo 4, dunque $a = 2f$.

$$\begin{aligned} 3^{2f} + 2^{2f} &= b^2 \\ 9^f + 4^f &= b^2 \\ &\equiv 2 \cdot (-1)^f \pmod 5 \end{aligned}$$

Nè 2 nè -2 sono residui quadratici modulo 5, $-\!\!\!\times\!\!\!-$ $\blacksquare$

Lemma ●
$3^a - 2^a = b^2$ ha come unica soluzione per $a, b \in \mathbb{Z}^+$ $(a, b) = (1, 1)$.

Dimostrazione
Se $a > 1$, come per il Lemma ▲ si nota che $a = 2f$.

$$\begin{aligned} 3^a - 2^{2f} &= b^2 \\ -\left(2^2\right)^f &\equiv b^2 \pmod 3 \\ -1 &\equiv b^2 \pmod 3 \end{aligned}$$

-1 non è residuo quadratico modulo 3 $-\!\!\!\times\!\!\!-$

Dunque $a = 1$; chiaramente $b = 1$ è allora l'unica soluzione $\blacksquare$

Per ■, si può scrivere

$$2^k m = n = \sigma_0(3^n - 2^n) = \sigma_0(3^m - 2^m)\sigma_0(3^m + 2^m)\cdots\sigma_0\left(3^{2^{k-1}m} + 2^{2^{k-1}m}\right)$$

Il numero di divisori di un numero è dispari se e solo se esso è un quadrato perfetto. Per il Lemma ▲ e per il Lemma ●, nessuno dei fattori di $3^n - 2^n$ come scritti sopra è un quadrato perfetto.

Se $m > 1$, allora $3^m - 2^m > 1$ e dunque $2 \mid \sigma_0(3^m - 2^m)$; tutti gli altri termini sono anch'essi divisi da 2. Ma allora ci sono almeno $k + 1$ due; 2^k ne assorbe solo k e dunque $2 \mid m$ $-\!\!\!\times\!\!\!-$.

Allora $m = 1$ e $\sigma_0(3^m - 2^m) = 1$; allora il problema si riduce a

$$2^k = \prod_{i=0}^{k-1} \sigma_0\left(3^{2^i} + 2^{2^i}\right)$$

È chiaro che $3^{2^i} + 2^{2^i} \neq 1$, e quindi $\sigma_0\left(3^{2^i} + 2^{2^i}\right) \geq 2$. Allora un prodotto di k termini maggiori o uguali di 2 è uguale a 2^k, e quindi ogni termine necessariamente è uguale a 2.

Noto che gli unici numeri con due divisori sono quelli primi, basta trovare il primo i per cui $3^{2^i} + 2^{2^i}$ non è primo; questo esclude tutte le soluzioni con $k > i$.

- $3^{2^0} + 2^{2^0} = 5$, primo;
- $3^{2^1} + 2^{2^1} = 13$, primo;
- $3^{2^2} + 2^{2^2} = 97$, primo;
- $3^{2^3} + 2^{2^3} = 6817 = 17 \cdot 401$.

Dunque le uniche soluzioni sono $k \in \{0, 1, 2, 3\}$; sapendo che $m = 1$ allora $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ $\blacksquare$

Marking scheme

- **1 punto** se si individuano correttamente tutte e sole le soluzioni
- **2 punti** se si dimostra il Lemma ■
- **1 punto** se si dimostrano il Lemma ▲ e il Lemma ●
- **4 punti** se si trova $m = 1$
- **2 punti** se si conclude

Sono inoltre attribuiti punti per soluzioni parziali che comprendono le seguenti parti:

- **1 punto** se si dimostra $n = 1$ o pari
- **2 punti** se si risolve il caso $n = 2^k$ senza dimostrare che sia l'unico possibile